Chapitre 5

FONCTIONS USUELLES

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Devenir rigoureux sur la rédaction avec des fonctions.
- Déterminer des ensembles de définition et de dérivation.
- Calculer des dérivées, des limites.
- Appliquer le théorème de la bijection.
- Connaitre les fonctions usuelles, nouvelles et anciennes.

Table des matières

I GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Dans ce chapitre, on ne considère que des fonctions *réelles de la variable réelle* (càd de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Dans certaines sections on considérera aussi des fonctions *complexes de la variable réelle* (càd de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$).

1 Vocabulaire et graphiques

Définition 1 (*Définition "intuitive" de fonction*)

Une fonction réelle de la variable réelle f est un objet qui à tout réel x associe une expression $f(x) \in \mathbb{R}$ *à condition que cela ait un sens.*

- L'ensemble de définition de f, noté D_f, est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ a un sens.
- Lorsque D_f n'est pas encore connu (ou s'il est "évident"), on peut définir la fonction f en notant

$$f : x \mapsto f(x)$$

- Une fois D_f déterminé, si on restreint la fonction f à D_f, on obtient une *application* $f : D_f \to \mathbb{R}$. On peut en particulier définir f par la notation :

$$\begin{aligned} f : D_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Il arrive qu'on souhaite définir une fonction f sur un sous-ensemble $D \subset D_f$. On note alors :

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

  La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est là encore une *application* : le vocabulaire vu au chapitre précédent s'applique. D est l'ensemble de départ et $\mathbb{R}$ l'ensemble d'arrivée de la fonction f. On parle aussi d'antécédent et d'image par la fonction f.

- Le graphe de la fonction f dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan est l'ensemble des points $(x, f(x))$ lorsque x parcourt D. La courbe reliant ces points est la courbe représentative de f et notée C_f.

Exemple 1. Déterminer D_f où $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 3}$.

Définition 2 (*Opérations sur les fonctions*)

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de même ensemble de départ D. On définit :

- La fonction somme de f et g, notée $f + g$, et de même pour $f - g$:

$$\begin{aligned} f + g : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f - g : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - g(x) \end{aligned}$$

- La fonction produit de f et g, notée fg ou $f \times g$; et si g ne s'annule pas sur D, la fonction $\dfrac{f}{g}$:

$$\begin{aligned} fg : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{f}{g} : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

- La fonction $|f|$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf :

$$\begin{aligned} |f| : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

DÉFINITION 3 (*Composée de fonctions*)

Soient $D, D' \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit la fonction composée de g et f par $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

L'ensemble de définition de $g \circ f$ est donné par

$$D_{g\circ f} := \left\{x \in D \mid f(x) \in D'\right\} = f^{-1}(D')$$

EXEMPLE 2. **Voir une fonction comme une composée pour trouver son ensemble de définition.** Déterminer l'ensemble de définition de f donnée par $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$

2 Transformations et symétries du graphe

PROPOSITION 4 (*Effet sur le graphe d'opérations simples*)

Connaissant la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut obtenir celle des fonctions suivantes (avec $a \in \mathbb{R}$) :

$$x \mapsto f(x)+a \qquad x \mapsto f(x+a) \qquad x \mapsto f(-x) \qquad x \mapsto -f(x) \qquad x \mapsto f(ax)$$

et leurs combinaisons. Voir le script suivant : `https://www.desmos.com/calculator/ieurh6nsr2`

- La courbe de $x \mapsto f(x)+a$ s'obtient à partir de C_f par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- La courbe de $x \mapsto f(x-a)$ s'obtient à partir de C_f par une translation de vecteur $a\vec{i}$.

DÉFINITION 5 (*Parité et périodicité*)

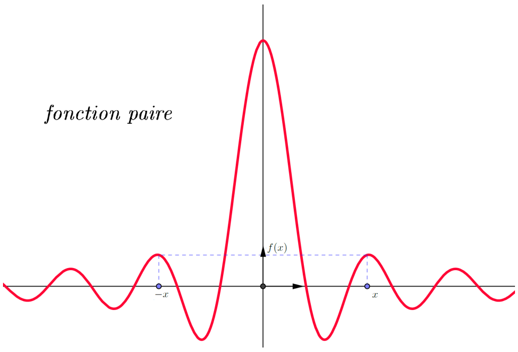
On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 si

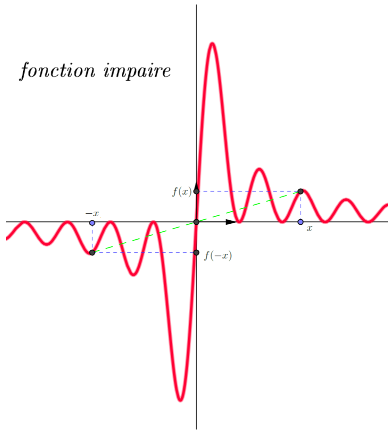
$$\forall x \in A \quad -x \in A$$

- Une fonction f définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0 est dite paire, lorsque :
$$\forall x \in D \quad f(-x) = f(x).$$
- Une fonction f définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0 est dite impaire, lorsque :
$$\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x).$$
- Soit $T > 0$. Une fonction f définie sur D est dite T-périodique lorsque :
$$\forall x \in D \quad \begin{cases} x+T \in D \\ x-T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

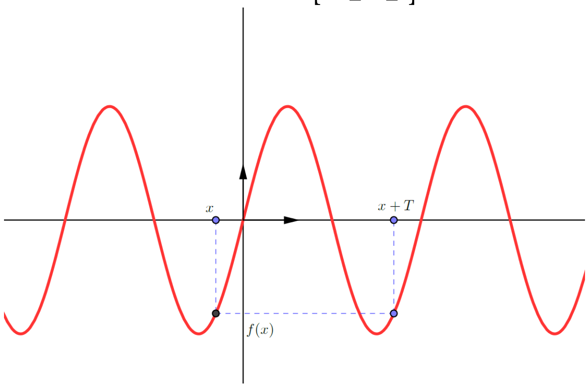
REMARQUES. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est impaire et si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.

La représentation graphique d'une fonction paire (resp. impaire) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. l'origine du repère).
Par conséquent, lors de l'étude d'une fonction paire ou impaire, on peut se contenter de travailler sur $D \cap \mathbb{R}_+$, puisque le graphe et les propriétés de f sur $D \cap \mathbb{R}_-$ se déduisent par cette symétrie.





Étant donné $T > 0$, si f est une fonction T-périodique, sa représentation graphique est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$, et par toute translation de vecteur $kT\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$. Donc il suffit d'étudier f sur une période, par exemple $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.



Définition 6 (*Restriction et prolongement*)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A \subset D$.

Comme $f : D \to \mathbb{R}$ est une application, on retrouve les notions de restriction à A de f, notée $f|_A$, ainsi que de prolongement de f.

On dit que f vérifie une propriété sur A si la fonction $f|_A$ vérifie cette propriété.

Par exemple, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dite décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ l'est.

3 Notions liées à l'ordre

Définition 7 (*Sens de variation de f*)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que :

1) f est **croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
2) f est **décroissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
3) f est **strictement croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
4) f est **strictement décroissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
5) f est **monotone** lorsque f est croissante ou décroissante.
6) f est **strictement monotone** lorsque f est strictement croissante ou strictement décroissante.
7) f est **constante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2)$

EXEMPLES 3.

1) La fonction $x \mapsto x$ est clairement croissante, et même strictement croissante (sur $\mathbb{R}$).
2) La fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.
3) La fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est ni croissante, ni décroissante... mais elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
4) Une fonction est à la fois croissante et décroissante si et seulement si elle est constante.

PROPOSITION 8 (*Monotonie et opérations*)

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

1) Si f, g sont croissantes (resp. strictement), alors $f+g$ est croissante (resp. strictement).
2) Si f, g sont décroissantes (resp. strictement), alors $f+g$ est décroissante (resp. strictement).
3) La composée de deux fonctions monotones (resp. strictement) est monotone (resp. strictement) :

	$f \nearrow$	$f \searrow$
$g \nearrow$	$g \circ f \nearrow$	$g \circ f \searrow$
$g \searrow$	$g \circ f \searrow$	$g \circ f \nearrow$

Démonstration. En appliquant la définition. Par exemple si f, g sont décroissantes, alors pour tous $x_1, x_2 \in D$, on a $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \implies g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. Donc $g \circ f$ est bien croissante. □

EXEMPLES 4.

- $x \mapsto x^3 + x + e^x$ est strictement croissante (sur $\mathbb{R}$) comme somme de fonctions strictement croissantes.
- $x \mapsto e^{-x^2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de exp strictement croissante et de la fonction $x \mapsto -x^2$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

REMARQUE. Il n'est pas toujours nécessaire de dériver pour obtenir le sens de variation !

DÉFINITION 9 (*Vocabulaire lié à l'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}$*)

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

1) Étant donné $M \in \mathbb{R}$, on dit que f est <u>majorée par M</u> si $\quad \forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$.
2) Étant donné $m \in \mathbb{R}$, on dit que f est <u>minorée par m</u> si $\quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$.
3) On dit que f est <u>majorée</u> s'il existe un réel M tel que f est majorée par M, càd
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$$
4) On dit que f est <u>minorée</u> s'il existe un réel m tel que f est minorée par m, càd :
$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$$
5) On dit que f est <u>bornée</u> si elle est à la fois majorée et minorée.
6) f est dite <u>positive</u> si elle est minorée par 0. On notera $f \geq 0$.
7) f est dite <u>négative</u> si elle est majorée par 0. On notera $f \leq 0$.
8) f est dite <u>strictement positive</u>, et on notera $f > 0$, si $\quad \forall x \in D \quad f(x) > 0$.
9) f est dite <u>strictement négative</u>, et on notera $f < 0$, si $\quad \forall x \in D \quad f(x) < 0$.

Proposition 10 *(Relations = et ≤ sur $\mathbb{R}^D$)*

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

- (Rappel) On définit une relation d'équivalence = sur $\mathbb{R}^D$ par :

$$f = g \iff \forall x \in D \quad f(x) = g(x)$$

- On définit une relation d'ordre partiel ≤ sur $\mathbb{R}^D$ par :

$$f \leq g \iff \forall x \in D \quad f(x) \leq g(x)$$

Proposition 11

Soit $f \in \mathbb{R}^D$.

$$f \text{ est bornée } \iff |f| \text{ est majorée } \iff \exists K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq K$$

4 Asymptotes

Définition 12 *(Asymptotes)*

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$$

  on dit que C_f présente une <u>asymptote horizontale</u> d'équation $y = \ell$ (en $-\infty$ ou en $+\infty$).

- S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

  on dit que C_f présente une <u>asymptote verticale</u> d'équation $x = x_0$.

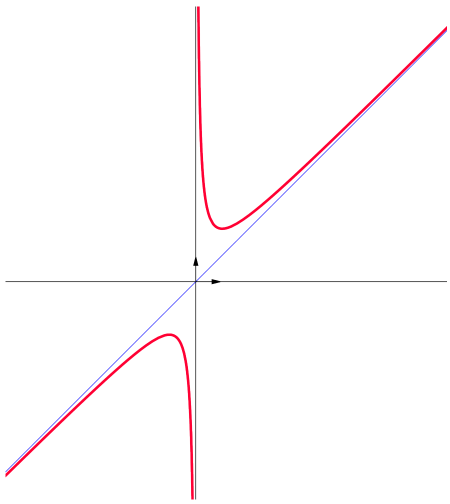
- S'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$ tels que

$$f(x) - (\alpha x + \beta) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

  on dit que C_f présente une <u>asymptote oblique</u> d'équation $y = \alpha x + \beta$ (en $-\infty$ ou en $+\infty$).

Exemple 5.

La représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ admet l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = x$ pour asymptotes.



II DÉRIVATION

Rappel : un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle s'il est de la forme $[c,d]$, $]c,d]$, $[c,d[$ ou $]c,d[$ avec $c,d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$. (Si c ou d est infini, l'intervalle doit être ouvert en cette borne).

HYPOTHÈSE

Dans toute la suite, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point (càd I et J se sont pas des singletons).

1 GÉNÉRALITÉS

Pour ce chapitre, la notion de limite reste "intuitive", comme en terminale. Elle sera précisée ultérieurement. On rappelle que la notation "$f : I \to \mathbb{R}$" signifie que f est une application de I dans $\mathbb{R}$, donc en particulier que la fonction f est bien définie sur tout I.

DÉFINITION 13

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite *finie* en a.
  Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, et est notée $f'(a)$.
- Soit $A \subset I$. On dit que f est dérivable sur A lorsque f est dérivable en tout point de A.
  On appelle alors fonction dérivée de f, et on note f', l'application :

$$\begin{aligned} f' : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

- L'ensemble des points où f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f.

REMARQUES. Le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé taux d'accroissement de f en a (défini pour tout $x \in I \setminus \{a\}$).

Quand on cherche une limite, trois cas sont possibles :

1) La limite n'existe pas (par exemple $\sin x$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$). Dans ce cas on ne peut pas écrire "lim" : $\cancel{\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x}$
2) La limite existe et est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) : on peut écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
3) La limite existe et est finie (appartient à $\mathbb{R}$). C'est seulement dans ce cas que f est dérivable en a. On peut alors écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \underline{f'(a) \in \mathbb{R}}$$

EXEMPLES 6. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto x^n$. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

2 Opérations sur les dérivées

Proposition 14 *(Opérations sur les dérivées)*

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si u, v sont dérivables sur I, alors :

1) Pour tous réels λ, μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I, et $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$.
2) uv est dérivable sur I, et $(uv)' = u'v + v'u$.
3) Si u ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
4) Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
5) Pour $n \in \mathbb{Z}$, u^n est dérivable sur I, et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, avec la convention $u^0 : x \mapsto 1$. (Si $n < 0$, il faut que u ne s'annule pas sur I)

Démonstration. Par la définition (ou récurrence pour 5). Par exemple pour le 3) : pour tout $a \in I$,

$$\frac{\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{u(a)}}{x-a} = \frac{-\frac{u(x)-u(a)}{u(x)u(a)}}{x-a} = \frac{-1}{u(x)u(a)} \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{-1}{u(a)^2} \times u'(a)$$

Donc par arbitraire sur a, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$. □

Exemple 7. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : x \mapsto x^{-n}$. Montrer que u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer u'.

Proposition 15 *(Dérivée d'une composée)*

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $u(I) \subset J$.

Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J, alors $v \circ u$ est dérivable sur I, et

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

Démonstration. Admis pour le moment. (Nécessite la composition des limites) □

Exemple 8. Soit $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 2}$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.

Proposition 16 *(Dérivée de la réciproque)*

Soit $f : I \to f(I)$ une fonction bijective et dérivable sur I. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Autrement dit si $y \in f(I)$:

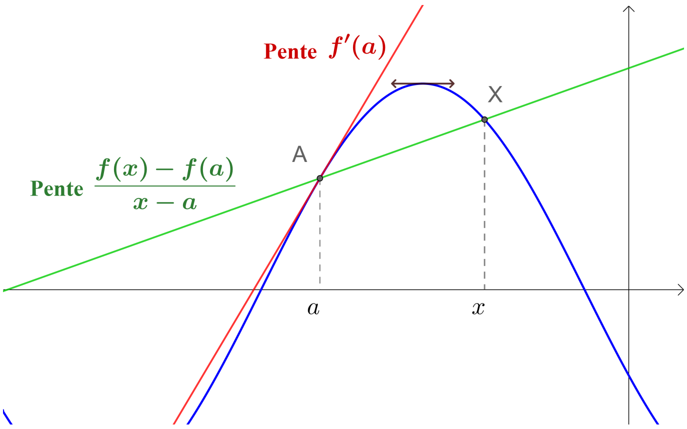
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration. Admis pour le moment. □

On a vu que $f : E \to F$ est surjective ssi $F = f(E)$. Donc si $f : I \to F$ est surjective, nécessairement $F = f(I)$.

3 Dérivée et tangente à C_f

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la droite qui relie les points $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$. Quand x tend vers a, si f est dérivable en a, cette pente tend vers $f'(a)$ qui correspond à la pente de la tangente à C_f au point a.



PROPOSITION 17

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. La courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(a, f(a))$ une tangente (non verticale) d'équation :

$$T : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

En particulier, si $f'(a) = 0$, alors la tangente à C_f en $x = a$ est horizontale. On le représente sur la coube par une double flèche $\leftrightarrow$ comme ci-dessus (ou, si a est un bord de I, une demi-flèche $\rightarrow$ ou $\leftarrow$).

4 Dérivée et sens de variation

THÉORÈME 18 (*Dérivée et sens de variation*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I.
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
- Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
- f est strictement croissante (resp. decroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I ET pour tout intervalle $[a, b] \subset I$ avec $a < b$, $f'|_{[a,b]} \not\equiv 0$.

Démonstration. Admis pour le moment. ☐

REMARQUES. Il est indispensable, pour appliquer ce résultat, que I soit un **intervalle**. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f' < 0$, mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$!

MÉTHODE (*Plan d'étude d'une fonction*)

1) Recherche de l'ensemble de définition D_f.
2) Étude de la périodicité *puis* de la parité, ce qui permet de restreindre le domaine d'étude à $D \subset D_f$.
3) Calcul des limites aux bords du domaine D.
4) Étude des variations sur D, avec éventuellement : dérivabilité, calcul de f', tableau de signe de f' et tableau de variations de f. Préciser dans le tableau les points où f' s'annule et les valeurs de f en ces points.
5) Recherche des asymptotes (verticales, horizontales, obliques).
6) (Optionnel) Pour aider au tracé, pour certaines valeurs $x \in D$, calcul de $f(x)$ et de l'équation de la tangente à C_f en x.
7) Tracé de la courbe pour $x \in D$, en s'aidant des points particuliers, des asymptotes, et des tangentes.

EXEMPLE 9. Étudier $f : x \mapsto \tan x$ et $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$.

5 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 19 (*Dérivées successives*)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de f en a, notée $f^{(k)}(a)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(a) = f(a)\\
&\text{si } f \text{ est dérivable en } a\text{, alors } f^{(1)}(a) = f'(a)\\
&\text{si } f' \text{ est dérivable en } a\text{, alors } f^{(2)}(a) = (f')'(a) f''(a)\\
&\vdots\\
&\text{si } f^{(k-1)} \text{ est dérivable en } a\text{, alors } f^{(k)}(a) = (f^{(k-1)})'(a).
\end{aligned}$$

Lorsque f admet une dérivée k-ième en tout point $a \in D$, on définit la dérivée k-ième de f par

$$\begin{array}{rcl} f^{(k)} : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f^{(k)}(x) \end{array}$$

EXEMPLE 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$. Déterminer la dérivée k-ième de f pour $k \in \mathbb{N}$.

Définition 20 (*Classe $\mathcal{C}^1$*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

REMARQUE. Le fait que f soit dérivable n'entraîne pas forcément que f soit $\mathcal{C}^1$. Contre-exemple : la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x > 0$

6 Fonction à valeurs complexes

Dans cette section on considère des fonctions *complexes à variable réelle*, càd des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 21

Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction (ou application). On définit

$$\begin{array}{rl} \mathrm{Re} f : D \to \mathbb{R} & \\ & x \mapsto \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \mathrm{Im} f : D \to \mathbb{R} & \\ & x \mapsto \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$$

Noter que ce sont des fonctions de $\mathbb{R}^D$ alors que $f \in \mathbb{C}^D$.

On dit que f est dérivable lorsque $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ le sont. On pose alors

$$f' := (\mathrm{Re} f)' + i(\mathrm{Im} f)'$$

Proposition 22 (*Dérivation dans $\mathbb{C}^D$*)

Soient $u, v : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I. Les résultats 1-5 de la proposition 14 sont encore vrais dans ce cadre.

III Fonctions usuelles

1 Logarithme

Définition 23 (*Logarithme népérien*)

La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{-1}$ qui s'annule en 1.

$$\begin{aligned} \ln :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

La justification de cette construction (notamment son unicité) sera précisée dans un chapitre ultérieur.

Proposition 24 (*Propriétés de base*)

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ (on précisera qui est e et pourquoi c'est vrai plus loin).
- ln est continue sur $]0,+\infty[$.
- ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

ln est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Proposition 25 (*Propriétés algébriques de* ln)

Soient $a, b > 0$.

1) **[Propriété fondamentale]**

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

2)

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

3) pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

Démonstration. En posant $\varphi_a : b \mapsto \ln(ab)$ et en dérivant $\varphi_a - \ln$. □

Proposition 26 (*Limites de* ln)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$$

Définition 27 (*Logarithme de base a*)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a, noté $\log_a$ l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

En particulier, $\log_a(a) = 1$

En physique, on emploie surtout le $\log_{10}$, tandis qu'en informatique c'est le $\log_2$.

2 Le théorème de la bijection

Théorème 28 (*Théorème de la bijection*)

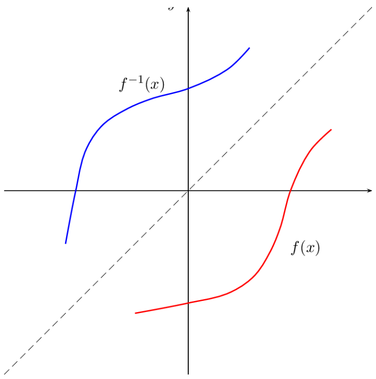
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement monotone (sur I). Alors :

- $f(I)$ est un intervalle.
- f est une bijection de I sur $f(I)$.
- $f^{-1} : f(I) \to I$ a la même monotonie (stricte) que f.

Remarque. Soient $x \in I$ et $y \in f(I)$. En remarquant que

$$(x, y) \in C_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y, x) \in C_{f^{-1}}$$

On en déduit que $C_{f^{-1}}$ se déduit de C_f par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée également première bissectrice du repère)



3 Exponentielle

ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Définition 29 (*Fonction exponentielle*)

La fonction exponentielle, notée exp est la réciproque de la fonction ln.

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

Proposition 30 (*Propriétés de base*)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$,
$$y = \exp(x) \iff x = \ln(y)$$
- $\exp(0) = 1$.
- $$\forall x > 0 \quad \exp(\ln x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x$$
- exp est continue sur $\mathbb{R}$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\exp'(x) = \exp(x).$$
exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

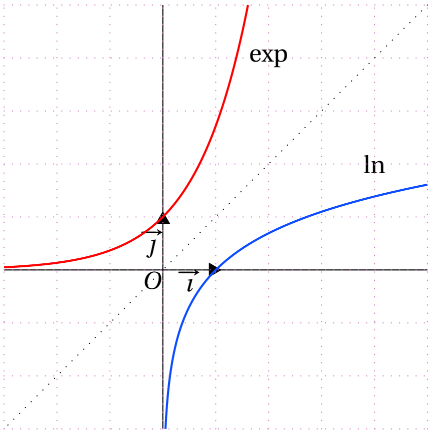


FIGURE 1 – Graphes de ln et exp

PROPOSITION 31 (*Propriétés algébriques de* exp)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1) **[Propriété fondamentale]**

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$$

2)

$$\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} \qquad \text{et} \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\exp(x))^n = \exp(nx)$$

Démonstration. En utilisant les propriétés de ln. ☐

DÉFINITION 32

On note $\underline{e := \exp(1)}$. Le réel e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper.

La propriété fondamentale a conduit à noter exp de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\exp(x) \text{ est noté } e^x}.$$

PROPOSITION 33 (*Limites de* exp)

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Une limite remarquable :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

DÉFINITION 34

Soit $a > 0$. La réciproque de $\log_a$, notée $\exp_a$ est définie par :

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp_a(x) = \exp(x \ln a). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\boxed{a^x := e^{x \ln a}} > 0$$

PROPOSITION 35

Soient $a, b > 0$

1) La propriété fondamentale est encore vraie pour $x \mapsto a^x$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \boxed{a^x a^y = a^{x+y}}$$

2)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

3)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$$

4) si $b > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x b^x = (ab)^x$$

Démonstration. En utilisant la définition de a^x et les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. □

4 PUISSANCE

On s'intéresse maintenant à la fonction $x \mapsto x^\alpha$. Et selon la valeur de α on a des définitions différentes.

DÉFINITION 36 ($x \mapsto x^n$)

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit la fonction puissance n par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

PROPOSITION 37

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors la fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

- Si $n \in 2\mathbb{N} + 1$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- Si $n \in 2\mathbb{N}$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

DÉFINITION 38 ($x \mapsto x^{-n}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction inverse puissance n par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n} \end{aligned}$$

PROPOSITION 39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors g est dérivable en tout $x \neq 0$ et

$$g'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

DÉFINITION 40 ($x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$)

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- Si $n \in 2\mathbb{N}$, on définit la fonction racine n-ième par

$$h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

C'est la réciproque de $f : x \mapsto x^n$ restreinte à $\mathbb{R}_+$ (on a vu que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$).

- Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, on définit la fonction racine n-ième par

$$h : \begin{array}{l} \boxed{\mathbb{R}} \to \boxed{\mathbb{R}} \\ x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

C'est la réciproque de $f : x \mapsto x^n$ qui est alors une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE. S'il est vrai que $\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \geq 0$, l'expression $\sqrt[3]{x}$ a un sens pour tout réel x !

On veut dériver $h = f^{-1}$. On exclut le cas $n = 1$ qui est évident. On applique la proposition adéquate : $h = f^{-1}$ est dérivable en tout $y \in D_h$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Or, $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Donc $h = f^{-1}$ est dérivable en tout y tel que $h(y) \neq 0$, c'est-à-dire en tout $y \in D_h \setminus \{0\}$.

PROPOSITION 41

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Si $n \in 2\mathbb{N}$, la fonction $h : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$...
- Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, la fonction $h : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^*$...

$$h'(y) = \frac{1}{f'(h(y))} = \frac{1}{nh(y)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{y^{1-\frac{1}{n}}} = \boxed{\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}}$$

REMARQUE. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on peut définir la fonction $i : x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ comme la composée de $f : x \mapsto x^p$ et de $h : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$. La fonction $i = f \circ h = h \circ f$ a le même ensemble de définition et de dérivabilité que h.

DÉFINITION 42 ($x \mapsto x^\alpha$)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α, notée p_α, la fonction

$$p_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x} \end{array}$$

REMARQUE. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, la fonction p_α coïncide avec une des fonctions puissances vues précédemment.

PROPOSITION 43 (*Dérivée de f_α*)

p_α est dérivable en tout $x \in]0, +\infty[$ et

$$p'_\alpha(x) = \frac{1}{x}\alpha e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

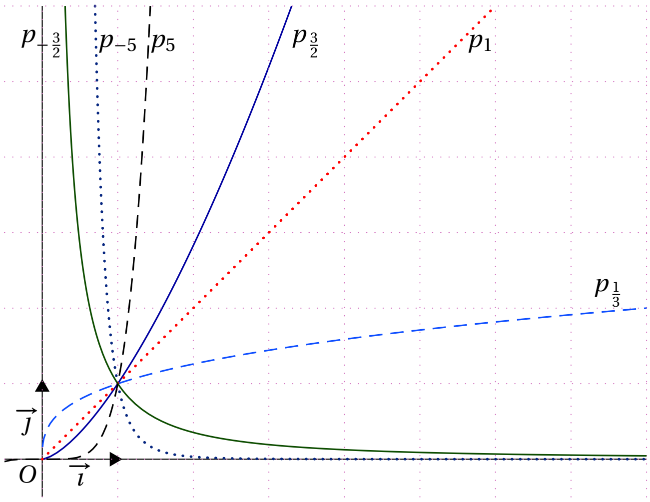


FIGURE 2 – Quelques graphes de fonctions puissance.

5 Croissances comparées

Permettent de lever certaines formes indéterminées.

PROPOSITION 44 (*Croissances comparées en $+\infty$*)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$

En d'autres termes, en $+\infty$, toute puissance positive de exp l'emporte sur toute puissance positive de x qui elle-même l'emporte sur toute puissance positive de ln :

$$\text{"} \quad \exp \gg x^\alpha \gg \ln \quad \text{"}$$

Démonstration. Montrons la deuxième formule. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa dérivée seconde est négative), donc (on verra plus tard dans l'année que) la courbe de ln se situe en-dessous de toutes ses tangentes. En prenant la tangente en $x = 1$, on déduit que pour tout $x > 0$,

$$\ln x \leq \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1$$

En particulier, pour tout $y > 0$, on a $y > \ln y$. Soit $\gamma > 0$ tel que $\gamma\beta < \alpha$. Pour tout $x > 0$, comme $x^\gamma > 0$, on en déduit

$$x^\gamma > \ln(x^\gamma) = \gamma \ln x$$

Finalement, $(\ln x)^\beta < \left(\frac{x^\gamma}{\gamma}\right)^\beta$. Alors, pour tout $x \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \leq \frac{x^{\gamma\beta - \alpha}}{\gamma^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

ce qui prouve par encadrement que $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Pour la première formule, on peut (on verra que c'est rigoureux) poser $x = \ln y$ et prendre la limite quand $y \to +\infty$ au lieu de $x \to +\infty$: on déduit le résultat par la seconde formule.

□

Proposition 45 (*Croissances comparées en $-\infty$ et 0*)
Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} |\ln x|^\beta x^\alpha = 0$$

6 Fonctions circulaires

On renvoie au chapitre 3 pour la définition de cos et sin et au formulaire de trigonométrie pour leurs propriétés (hors dérivation).

Proposition 46
sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\sin'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\sin x$$

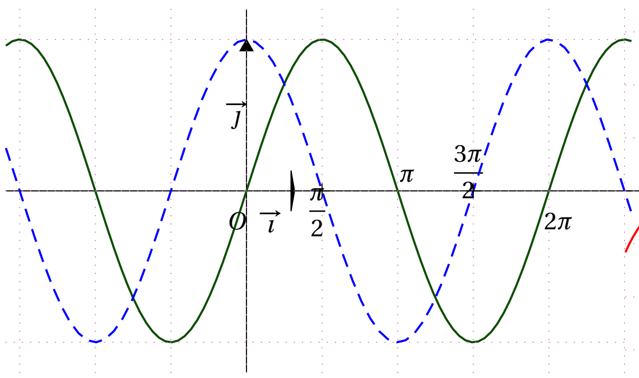


Figure 3 – Graphes de sin et cos.

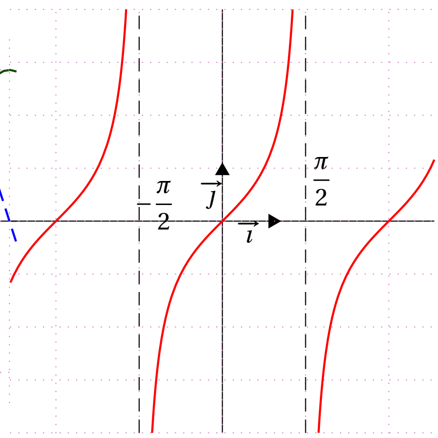


Figure 4 – Graphe de tan.

Définition 47
La fonction tangente d'un réel $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 48
tan est continue et dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition et

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

tan est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (et sur les autres intervalles par périodicité, mais pas sur leur réunion).

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x>-\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

7 Fonctions circulaires réciproque

7.a Fonction arcsinus

sin est *continue* et *strictement croissante* sur *l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. L'intervalle image est $[-1, 1]$. Par le théorème de la bijection, sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 49 (*arcsinus*)

La fonction arcsinus, notée arcsin, est la fonction réciproque de sin : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

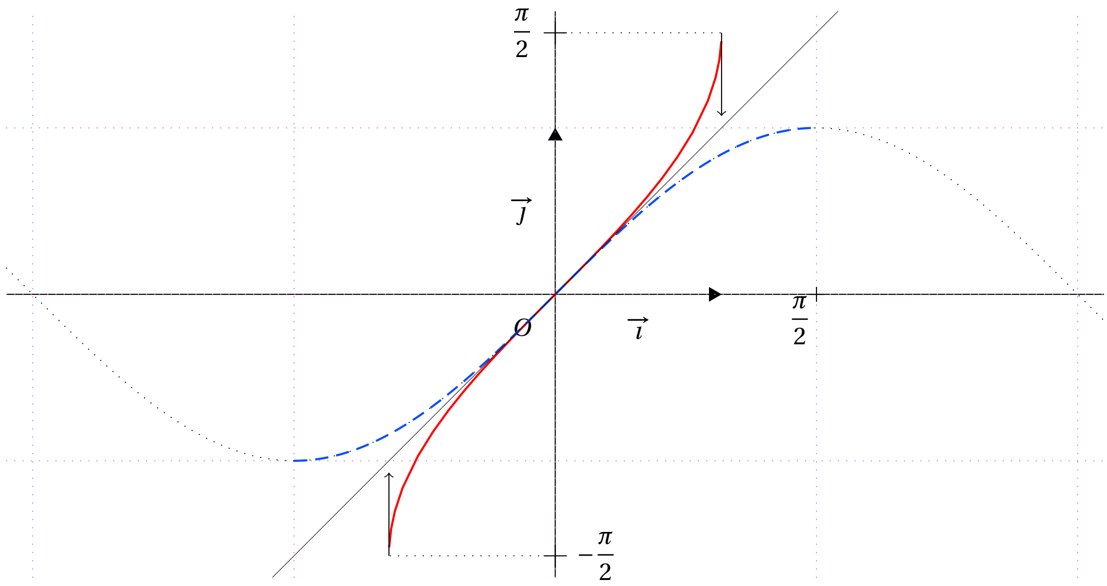


Figure 5 – Graphes de sin (en pointillés) et arcsin (en rouge).

Proposition 50 (*Propriétés de arcsin*)

1)

$$\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\arcsin(x)) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

2) arcsin est impaire.

3) arcsin est strictement croissante.

4) arcsin est continue sur $[-1, 1]$, dérivable en tout $x \in]-1, 1[$ et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque. Attention, pour $x \in \mathbb{R}$ on n'a pas nécessairement $\arcsin(\sin(x)) = x$, par exemple $\arcsin(\sin \pi) = 0$

7.B Fonction arccosinus

cos est *continue* et *strictement décroissante* sur *l'intervalle* $[0,\pi]$. L'intervalle image est $[-1,1]$. cos réalise donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

Définition 51 (*arccosinus*)

La fonction arccosinus, notée arccos, est la fonction réciproque de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

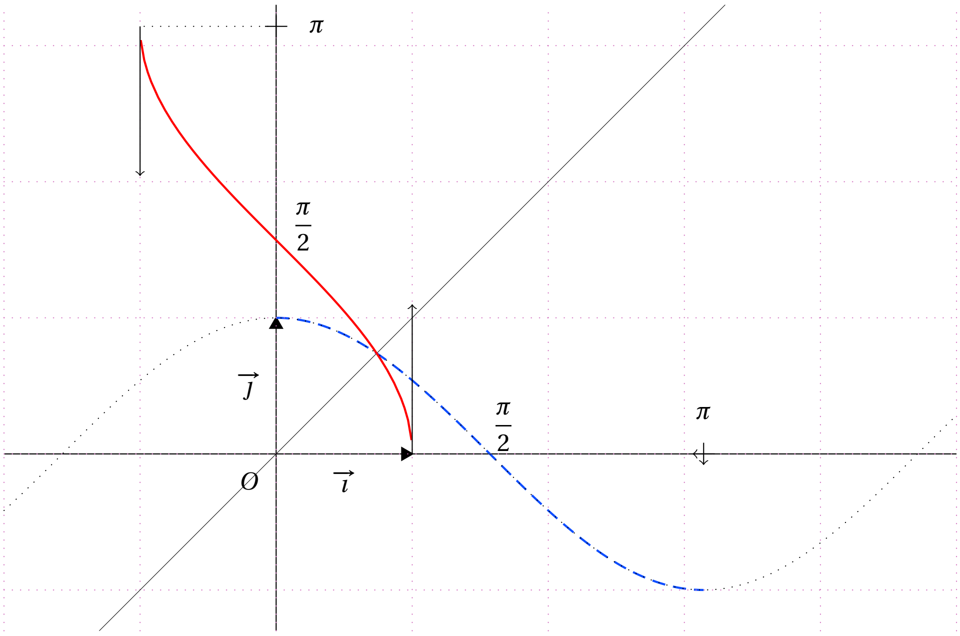


Figure 6 – Graphes de cos (en pointillés) et arccos (en rouge).

Proposition 52 (*Propriétés*)

1)
$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arccos(x)) = x$$
$$\forall x \in [0,\pi] \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\arccos(-1) = \pi \qquad \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \arccos(1) = 0$$

2) arccos n'est ni paire ni impaire.
3) arccos est strictement décroissante.
4) arccos est continue sur $[-1,1]$, dérivable en tout $x \in]-1,1[$ et
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Attention, pour $x \in \mathbb{R}$ on n'a pas nécessairement $\arccos(\cos(x)) = x$, par exemple $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.

7.c Fonction arctangente

tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. L'intervalle image est $\mathbb{R}$. tan réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 53 (*arctangente*)

La fonction arctangente, notée arctan, est la fonction réciproque de tan : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

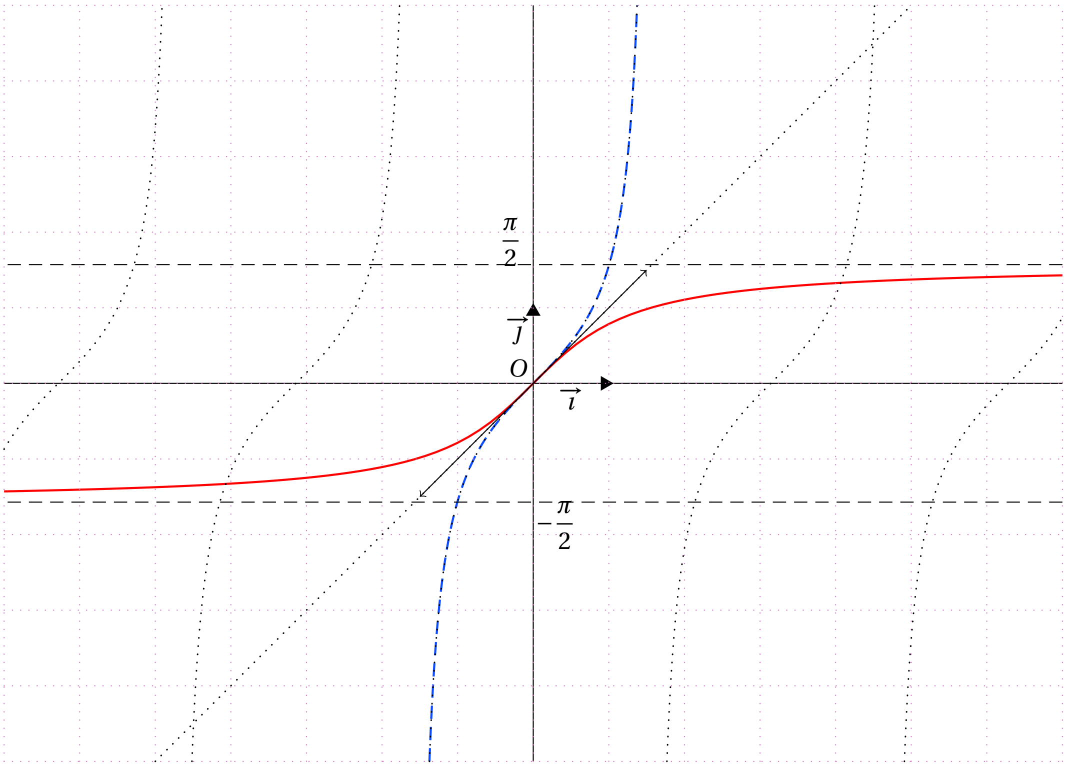


Figure 7 – Graphes de tan (en pointillés) et arctan (en rouge).

Remarque. On a une limite finie de arctan en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

PROPOSITION 54

1)
$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arctan(0) = 0 \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan(x)) = x$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \arctan(\tan(x)) = x$$

2) arctan est impaire.

3) arctan est strictement croissante.

4) arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

8 Fonctions hyperboliques

DÉFINITION 55

On définit :

- la fonction cosinus hyperbolique, notée ch :
$$\mathrm{ch} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
- la fonction sinus hyperbolique, notée sh :
$$\mathrm{sh} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

PROPOSITION 56 (*Relation fondamentale*)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

PROPOSITION 57 (*Parité, signe*)

1) $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$.

3) ch est paire et sh est impaire.

4) sh et ch sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$$
En particulier, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5)
$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

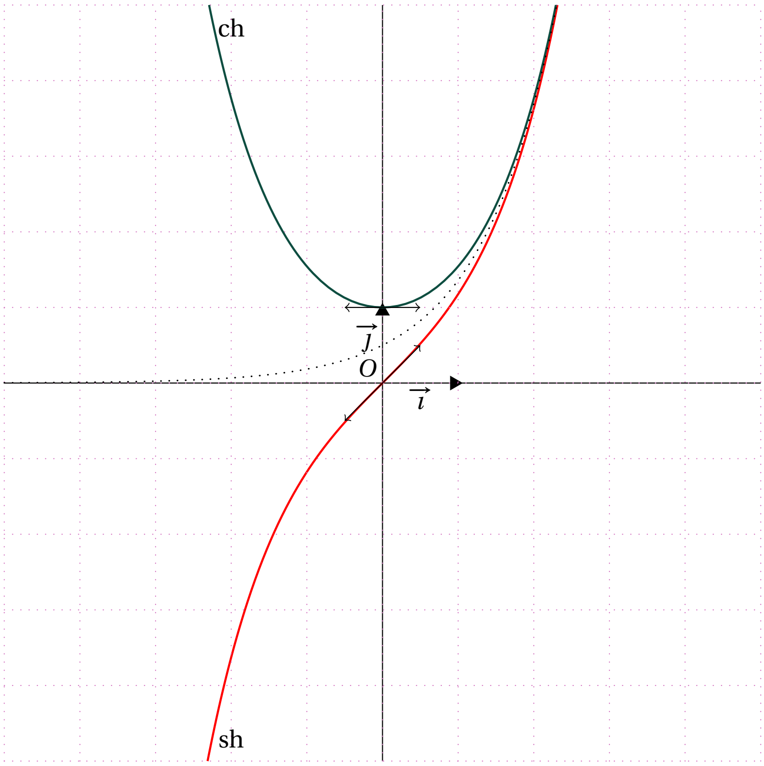


FIGURE 8 – Graphes de ch et sh.

DÉFINITION 58 (*Tangente hyperbolique*)

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th :

$$\mathrm{th} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{th}(x) := \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

PROPOSITION 59 (*Propriétés*)

1) $\mathrm{th}(0) = 0$
2) th est impaire.
3) th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

Et en particulier, th est strictement croissante.

4)

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$$

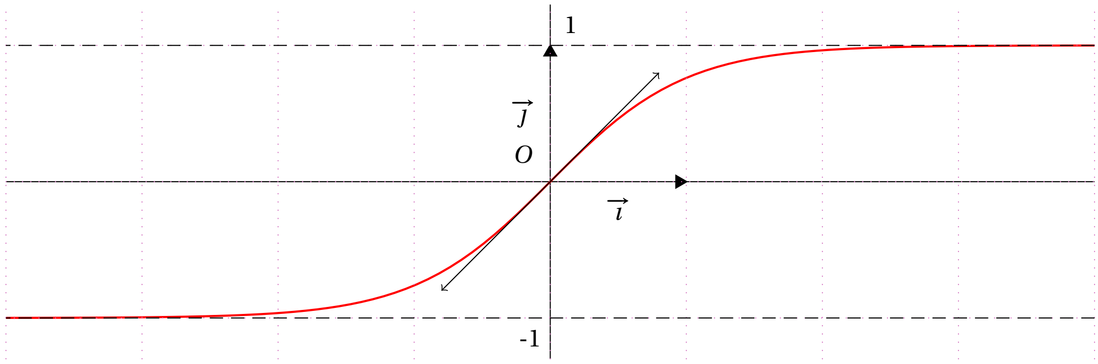


FIGURE 9 – Graphe de th.

9 Fonctions exponentielles complexes

Proposition 60

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{z_0 t} \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & z_0 e^{z_0 t} \end{array}$$

Proposition 61

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

La fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\varphi(t)} \end{array}$$

est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \varphi'(t) e^{\varphi(t)} \end{array}$$

EXEMPLES 11.

Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{x+ix^2}$.
Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $t \mapsto e^{i\omega t}$.